EXERCICE N°4 : 30' 5 points

Soit la suite (u_n) définie sur IN par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in$ IN : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4}(2 - u_n^2)$.

1°) Soit la fonction f définie sur $[1,2]$ par : $f(x) = x + \frac{1}{4}(2 - x^2)$.

a) Montrer que pour tout $x \in [1,2]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

b) Montrer que pour tout $x \in [1,2]$ on a : $|f(x) - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|x - \sqrt{2}|$.

2°) a) Montrer par récurrence, que pour tout $n \in$ IN, $1 \leq u_n \leq 2$.

b) Montrer, que pour tout $n \in$ IN, $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$

c) En déduire que pour tout $n \in$ IN, $|u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

EXERCICE N°5 : 30' 5 points

On donne ci-contre le tableau de variation d'une fonction f dérivable sur IR et vérifiant : $f(0) = \frac{1}{4}$ et pour tout $x \in [-1,1]$,

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	-2

1°) Justifier que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $[-1,1]$.

2°) Soit la suite réelle (u_n) définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{4} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

a) Montrer que pour tout $n \in IN$, $-1 \leq u_n \leq 1$.

b) Montrer que pour tout $n \in IN$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

c) En déduire que pour tout $n \in IN$, $|u_n - \alpha| \leq 5\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$.

d) Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3°) Soit $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$,pour tout $n \in IN$. Montrer pour tout $n \in IN$, $f\left(\frac{1}{n^2}\right) \leq v_n \leq f\left(\frac{1}{n}\right)$ et en déduire la limite de (v_n).

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn